

Schnittebenenverfahren in der Kombinatorischen Optimierung

Michael Jünger und Gerhard Reinelt

Abstract

Bei der Lösung anwendungsrelevanter Fragestellungen in Mathematik, Informatik, den Naturwissenschaften und Wirtschaftswissenschaften, sowie in der industriellen Praxis, die als kombinatorische Optimierungsprobleme formuliert werden können, haben sich die auf Polyedertheorie basierenden Schnittebenenverfahren als sehr leistungsfähig erwiesen. In vielen Fällen ist der Einsatz von Schnittebenenverfahren die derzeit einzige zur Verfügung stehende Technik zur Lösung praxisrelevanter Größenordnungen der auftretenden Probleminstanzen. In diesem Übersichtsartikel werden Theorie und Praxis von Schnittebenenverfahren zusammenfassend skizziert.

1 Motivation

Kombinatorische Optimierungsprobleme treten in vielfältiger Weise bei der Modellierung von Fragestellungen in Mathematik, Informatik, den Naturwissenschaften, den Wirtschaftswissenschaften und auch in der industriellen Praxis auf. Die meisten dieser Probleme sind NP-schwierig, so daß Instanzen von anwendungsrelevanten Größenordnungen mit dem uns zur Verfügung stehenden algorithmischen Wissen oft nicht optimal gelöst werden können. Derzeitige Forschungsaktivitäten folgen deshalb zwei Trends.

Einerseits versucht man gute (nicht notwendigerweise optimale) zulässige Lösungen in vertretbarer Rechenzeit zu bestimmen. Hierbei liegt die Betonung teilweise auf der Ausnutzung struktureller Eigenschaften des behandelten Problems in speziellen Heuristiken, teilweise auf dem Einsatz von neuartigen algorithmischen Ansätzen, die physikalische oder biologische Phänomene simulieren ("Simulated Annealing", "Evolutionalgorithmen"). Die mathematisch anspruchsvollste Aufgabe besteht in diesem Zusammenhang in der Regel darin, gute Schranken für den Wert der Optimallösung effizient zu berechnen, um Gütegarantien für die heuristisch ermittelten Lösungen geben zu können.

Andererseits ist man bestrebt, durch neue strukturelle Einsichten bessere Algorithmen zur Optimallösung zu entwickeln und durch Ausnutzung moderner Computerarchitekturen die Größenordnungen der Probleme, die man in vertretbarer Rechenzeit optimal lösen kann, voranzutreiben.

In den letzten Jahren hat sich erwiesen, daß Schnittebenenverfahren in der kombinatorischen Optimierung in beiden Forschungsrichtungen einen wichtigen Beitrag leisten können. Ziel dieser

Übersicht
kombinatorischen
nen die
Bedeutung
für Schnittebenen
den Pro
der in s
Wert de
ein Bra
Verbind
Hilfe vo
and-Cut
und Tec
stungsfä
auch de
wendung
Problem

2 P

Die zulässige Lösung
gensysteme
ein Gew
niert als
Minimie
gen. In
 $G = (V, E)$
 V . Ein
 $(u, v) \in E$
richteten
bezeichn
 $u, v \in V$

2.1 F

Instanz:

Vol

wie

Lösungen

Per

Kar

Bemerkun

Die

(Ed

Übersicht ist es, diesen Beitrag informal zu skizzieren. Wir werden zunächst einige prominente kombinatorische Optimierungsprobleme definieren und Anwendungsgebiete vorstellen, in denen die effiziente und im präzisierbaren Sinne gute Lösung von Instanzen solcher Probleme von Bedeutung ist. Dann werden wir die polyedrische Kombinatorik, die die mathematische Basis für Schnittebenenverfahren darstellt, einführen. Erkenntnisse über die Facettialstruktur von den Problemen zugeordneten Polytopen führen zur Formulierung des Schnittebenenansatzes, der in seiner reinen Form in der Regel die Bestimmung einer sehr guten Schranke für den Wert der Optimallösung erlaubt. In Verbindung mit einem Enumerationsschema kann dann ein Branch-and-Bound-Algorithmus formuliert werden, der Optimallösungen berechnet. Die Verbindung von Enumeration ("branch") mit der Bestimmung der Schranken ("bounds") mit Hilfe von Schnittebenen ("cuts") führt in diesem Zusammenhang zu der Bezeichnung "Branch-and-Cut-Algorithmus". Ein solches Verfahren kann durch geschickten Einsatz von Heuristiken und Techniken aus der linearen Programmierung wesentlich verbessert werden. In seiner Leistungsfähigkeit sowohl unter dem Aspekt des schnellen Findens beweisbar guter Lösungen als auch der Bestimmung von Optimallösungen ist dieser Ansatz bisher in vielen relevanten Anwendungsbereichen unübertroffen. Wir werden dies anhand der exemplarisch vorgestellten Problemstellungen belegen.

2 Problembeispiele

Die zulässigen Lösungen kombinatorischer Optimierungsprobleme sind gegeben durch ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ für eine endliche Grundmenge $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Jedem $e \in E$ ist ein Gewicht $c_e \in \mathbb{R}$ zugeordnet, und der Wert einer zulässigen Lösung $F \in \mathcal{F}$ ist definiert als $c(F) := \sum_{e \in F} c_e$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir hier nur Minimierungsprobleme, die die Bestimmung einer zulässigen Lösung minimalen Werts verlangen. In den folgenden Problembeispielen ist E die Kantenmenge eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ oder A die Kantenmenge eines gerichteten Graphen $D = (V, A)$ mit Knotenmenge V . Eine Kante e schreiben wir als $e = (u, v)$, wobei $(u, v) \neq (v, u)$ im gerichteten und $(u, v) = (v, u)$ im ungerichteten Fall ist. $K_n = (V_n, E_n)$ bezeichnet den vollständigen ungerichteten Graphen mit $|V| = n$ und $(u, v) \in E_n$ für alle $u, v \in V$, $u \neq v$. $D_n = (V_n, A_n)$ bezeichnet den vollständigen gerichteten Graphen mit $|V| = n$ und $(u, v), (v, u) \in A_n$ für alle $u, v \in V$, $u \neq v$. Wir formulieren einige Standardprobleme.

2.1 Perfektes-Matching-Problem (PMP)

Instanz:

Vollständiger ungerichteter Graph $K_n = (V_n, E_n)$, wobei n gerade ist, Kantengewichte $c_e \in \mathbb{R}$ für alle $e \in E_n$

Lösungen:

Perfekte Matchings, das sind Kantenmengen $M \subseteq E_n$ mit paarweise nichtadjazenten Kanten, d. h. $(i, j), (k, l) \in M$ impliziert $|\{i, j, k, l\}| = 4$

Bemerkung:

Dies ist das einzige unserer Problembeispiele, das in polynomialer Zeit lösbar ist (Edmonds (1965) [6]).

2.2 Traveling-Salesman-Problem (TSP)

Instanz:

Vollständiger ungerichteter Graph $K_n = (V_n, E_n)$, Kantengewichte $c_e \in \mathbb{R}$ für alle $e \in E_n$

Lösungen:

Hamiltonsche Kreise (Touren) in K_n , das sind Kantenmengen der Kardinalität n , die einen geschlossenen Kreis bilden, in dem jeder Knoten genau einmal auftritt, d. h. Kantenmengen der Form $T = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_1)\}$ mit $|T| = n$ und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$

Bemerkung:

Das TSP ist vermutlich das am intensivsten untersuchte Problem unserer Liste. Diesem Problem wurde unter anderem ein wichtiges Standardwerk der kombinatorischen Optimierung (Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan & Shmoys (1985) [18]) und eine spezielle Konferenz im Jahr 1990 an der Rice University, in der Wissenschaftler verschiedener Disziplinen ihre Beiträge vorstellten, gewidmet.

2.3 Max-Cut-Problem (MCP)

Instanz:

Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Kantengewichte $c_e \in \mathbb{R}$ für alle $e \in E$

Lösungen:

Schnitte in G , das sind Kantenmengen C , zu denen es eine Partition $V = V_1 \cup V_2$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gibt, so daß für alle $e = (u, v) \in C$ gilt $|\{u, v\} \cap V_1| = 1$ und $|\{u, v\} \cap V_2| = 1$. Jede Teilmenge $W \subseteq V$ definiert einen solchen Schnitt $\delta(W) := \{(u, v) \in E \mid u \in W, v \in V \setminus W\}$.

Bemerkung:

In unserem Kontext sollten wir dieses Problem eigentlich "Min-Cut-Problem" nennen, die benutzte Bezeichnung hat historische Gründe, da der Begriff "Min-Cut-Problem" üblicherweise den Spezialfall mit nichtnegativen Kantengewichten bezeichnet, der mit Algorithmen für Maximalflußprobleme in polynomialer Zeit lösbar ist.

2.4 Quadratisches-0-1-Problem (0-1-QP)

Instanz:

Quadratische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Vektor $c \in \mathbb{R}^n$

Lösungen:

Alle 0-1-Vektoren $x \in \{0, 1\}^n$. Der zu x zugeordnete Zielfunktionswert ist $x^T Q x + c^T x$.

Bemerkung:

Eine relativ einfache Transformation zeigt, daß dieses Problem äquivalent zum Max-Cut-Problem ist.

2.5 Survivable-Network-Problem (SNP)

Instanz:

Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Kantengewichte $c_e \in \mathbb{R}$ für alle $e \in E$, Knotenmengen $V_1, V_2 \subseteq V$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Lösungen:

Subgraphen $G' = (V', E')$ von G mit der Eigenschaft: Wenn ein Knoten mit seinen inzidenten Kanten entfernt wird, so gibt es im Restgraphen zwischen je zwei Knoten aus V_1 noch mindestens einen Weg und zwischen je zwei Knoten aus V_2 noch mindestens zwei knotendisjunkte Wege.

Bemerkung:

Die hier angegebene ist eine der einfacheren Varianten. Es gibt eine Vielzahl von Problemtypen in diesem Bereich, die durch unterschiedliche Anforderungen an die Zusammenhangseigenschaften entstehen.

2.6 Linear-Ordering-Problem (LOP)

Instanz:

Vollständiger gerichteter Graph $D_n = (V_n, A_n)$, Kantengewichte $c_a \in \mathbb{R}$ für $a \in A_n$

Lösungen:

Lineare Ordnungen auf V , das sind aufspannende azyklische Turniere auf A_n , d. h. Kantenmengen $L \subseteq A_n$ mit Kardinalität $|L| = \binom{n}{2}$, die keinen gerichteten Kreis der Form $K = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_k, v_1)\}$ mit $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$, $1 \leq k \leq n$, enthalten

Bemerkung:

Das LOP ist das erste Problem, für das ein Branch-and-Cut-Algorithmus veröffentlicht wurde.

2.7 Sequential-Ordering-Problem (SOP)

Instanz:

Vollständiger gerichteter Graph $D_n = (V_n, A_n)$, Kantengewichte $c_a \in \mathbb{R}$ für alle $a \in A_n$, partielle Ordnung " $\leq$ " auf V

Lösungen:

Gerichtete Hamiltonsche Wege der Länge n , die mit der partiellen Ordnung " $\leq$ " verträglich sind, d. h. Kantenmengen $S = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ und $v_i \leq v_j$ für $i > j$

Bemerkung:

Der Spezialfall, in dem die partielle Ordnung " $\leq$ " leer ist, ist äquivalent zu einer gerichteten Version des Traveling-Salesman-Problems.

Die Anzahl der zulässigen Lösungen wächst üblicherweise exponentiell mit der Problemgröße, die wir hier aus Platzgründen nur intuitiv erfassen. So gibt es zum Beispiel in einem vollständigen ungerichteten Graphen auf n Knoten $\frac{1}{2}(n-1)!$ Touren und 2^{n-1} Schnitte, oder in einem vollständigen gerichteten Graphen $n!$ lineare Ordnungen.

3 Anwendungsbeispiele

Wir skizzieren einige praktische Problemstellungen, zu deren Lösung erfolgreich polyedrische Methoden eingesetzt wurden, bzw. gegenwärtig entwickelt werden. Dabei handelt es sich nur um einen kleinen Ausschnitt aus den vielfältigen Problemstellungen, deren Modellierung auf schwierige kombinatorische Optimierungsprobleme führt. Weitere Anwendungen finden sich zum Beispiel in Clusteranalyse, Scheduling, Routenplanung, Produktionsplanung und Logik.

3.1 Platzierung von Zellen beim Design integrierter Schaltungen

Der Entwurf integrierter Schaltungen erfolgt zum großen Teil nicht auf Transistorebene, sondern auf der Basis komplexer Makrozellen. Nach dem Logikentwurf besteht die Aufgabe darin, die Makrozellen so auf dem Chip anzuordnen, daß möglichst wenig Platz verbraucht wird, aber alle notwendigen Verbindungen realisiert werden können und die Designregeln eingehalten werden. Es gibt verschiedene Ansätze zur Lösung dieses Problems. Ein Ansatz verwendet eine Modellierung als Quadratisches-0-1-Problem (Jünger, Martin, Reinelt & Weismantel (1991) [16]).

3.2 Via-Minimierung

Beim Entwurf integrierter Schaltungen tritt das Problem der Via-Minimierung auf. Zur Realisierung der Verbindungen zwischen den einzelnen Komponenten einer integrierten Schaltung stehen typischerweise zwei oder mehr Lagen zur Verfügung. Die Verbindungen müssen nun so hergestellt werden, daß keine unerwünschten Kurzschlüsse entstehen und gewisse Design-Regeln eingehalten werden. Hierzu ist es sehr oft notwendig, daß eine Verbindung von einer Lage zur anderen wechseln muß. Lagenwechsel werden über Durchkontaktierungen (Vias) realisiert. Vias behindern durch ihren zusätzlichen Platz die Kompaktifizierung des Chips und können die Produktionsausbeute verringern. Für den Fall, daß die Verdrahtung auf zwei Lagen zu erfolgen hat, läßt sich das Problem, die Verdrahtung mit der minimalen Anzahl von Vias zu realisieren, als Max-Cut-Problem modellieren (weitere Details siehe Grötschel, Jünger & Reinelt (1989) [10]).

3.3 Plotten von Masken für integrierte Schaltungen/Leiterplatten

In einigen Prozeßschritten bei der Herstellung integrierter Schaltungen oder Leiterplatten werden Strukturen durch den Einsatz fotografischer Techniken realisiert. Hierfür sind präzise Fotomasken zu fertigen. Eine Möglichkeit, solche Masken hochgenau herzustellen, besteht in

der Belich
ein Belich
die gewün
len Herste
Aspekte
zahl von B
probleme
Diskussion

3.4 Be

In einem
diese mit
der Leiter
von einem
taler und
lassen sich
Gesamtpo
läßt sich a

3.5 Tr

Zur quanti
stischen Ä
sogenannte
Matrizen,
die Einträge
Triangulati
möglichst
sich als Lin

3.6 Be

Ein wichtig
(Grundzust
rial, in das
Spinkonfigu
gie führt.
oder -1 an
nicht durch
Eine ausfüh
Jünger & R

3.7 Aus

Hier handelt
serkabeln zu

der Belichtung fotosensitiv beschichteter Glasplatten mit Hilfe mechanischer Plotter. Hier wird ein Belichtungskopf über die Platte bewegt, und durch Auswahl geeigneter Blenden werden die gewünschten Strukturen belichtet. Bei der Modellierung des Problems der zeitminimalen Herstellung einer solchen Fotomaske als kombinatorisches Optimierungsproblem sind einige Aspekte (Belichtung von Punkt- und Linienstrukturen, Zeit für Blendenwechsel, erlaubte Anzahl von Blendenwechseln, u. a.) zu beachten. Es treten eine Reihe verschiedener Optimierungsprobleme (u. a. auch Traveling-Salesman-Probleme) bei dieser Modellierung auf. Eine genauere Diskussion findet sich in Grötschel, Jünger & Reinelt (1991) [11].

3.4 Bohren von Leiterplatten

In einem der abschließenden Fertigungsschritte bei der Produktion von Leiterplatten werden diese mit Bohrungen zur Aufnahme der verschiedenen Komponenten versehen. Je nach Art der Leiterplatte sind dies einige Hundert bis mehrere Tausend Bohrungen. Meist werden diese von einem mechanischen Bohrer ausgeführt, der durch gleichzeitige Bewegungen in horizontaler und vertikaler Richtung positioniert werden kann. Verkürzungen in der Produktionszeit lassen sich erzielen, wenn die Löcher in einer Reihenfolge gebohrt werden, die zu einer kurzen Gesamtpositionierungszeit führt. Die Bestimmung von guten oder optimalen Bohrreihenfolgen läßt sich als Traveling-Salesman-Problem modellieren.

3.5 Triangulation von Input-Output-Tabellen

Zur quantitativen Erfassung der Güterströme einer Volkswirtschaft werden von mehreren statistischen Ämtern (Statistisches Bundesamt Wiesbaden, EUROSTAT Luxemburg, DIW Berlin) sogenannte Input-Output-Tabellen für verschiedene Länder erstellt. Dies sind quadratische Matrizen, deren Zeilen und Spalten Teilbereichen (Sektoren) der Volkswirtschaft entsprechen, die Einträge repräsentieren den Güteraustausch zwischen den Sektoren in Geldeinheiten. Das Triangulationsproblem besteht darin, eine Reihenfolge der Sektoren zu bestimmen, so daß möglichst wenig Güteraustausch inkompatibel mit dieser Reihenfolge ist. Dieses Problem läßt sich als Linear-Ordering-Problem behandeln (Grötschel, Jünger & Reinelt (1984) [8]).

3.6 Bestimmung der Grundzustände von Spingläsern

Ein wichtiges Problem der theoretischen Physik ist die Bestimmung energieminimaler Zustände (Grundzustände) von Ising-Spingläsern. Ein Spinglas besteht aus nichtmagnetischem Material, in das magnetische "Verunreinigungen" eingebracht sind. Man interessiert sich dafür, die Spinkonfiguration der Verunreinigungen zu bestimmen, die zu einem Zustand minimaler Energie führt. In einem vereinfachten Modell (Ising-Modell) dürfen die Spins nur die Werte +1 oder -1 annehmen. Die Bestimmung der Grundzustände von Spingläsern ist experimentell nicht durchführbar. Ihre theoretische Bestimmung läßt sich als Max-Cut-Problem modellieren. Eine ausführliche Diskussion dieses Spinglasproblems und seiner Relevanz erfolgt in Grötschel, Jünger & Reinelt (1987) [9].

3.7 Auslegung von Glasfasernetzwerken

Hier handelt es sich um das Problem, eine vorgegebene Menge von Orten (Knoten) mit Glasfaserkabeln zu verbinden, so daß eine Kommunikation zwischen je zwei Knoten möglich ist und

die Kosten für die Installation des Netzes minimal sind. Ohne weitere Zusatzanforderungen wäre hier eine Baumstruktur des Netzwerks optimal. In der Praxis verlangt man allerdings noch gewisse Ausfallsicherheiten für wichtige Verbindungen. So sollen etwa zwei Knoten auch dann noch kommunizieren können, wenn ein oder zwei Verbindungen ausfallen. Fragestellungen dieser Art lassen sich als Survivable-Network-Probleme modellieren und führen je nach Art der Zusatzbedingungen auf schwierige Optimierungsprobleme in Graphen. In Grötschel, Monma & Stoer (1989b) [14] erfolgt eine detailliertere Diskussion.

3.8 Werkzeugmaschinensteuerung

Zur Herstellung eines komplexen Werkstücks sind meist mehrere Arbeitsgänge erforderlich: Bohren, Fräsen, Entgraten, Polieren, etc. Es gibt mittlerweile Roboter, die alle diese Arbeitsgänge ausführen können. Ein Bearbeitungskopf wird mit entsprechenden Bearbeitungswerkzeugen bestückt und dann positioniert, um die erforderlichen Arbeiten auszuführen. Die Positionierungszeit setzt sich zusammen aus der Werkzeugwechselzeit und der reinen Bewegungszeit. Gewünscht wird die Ausführung der Arbeitsgänge in einer Reihenfolge, die zu minimaler Gesamtpositionierungszeit führt. Die Lösung dieses Problems wird dadurch erschwert, daß die Reihenfolge der Arbeitsgänge nicht beliebig ist, sondern daß gewisse Präzedenzbedingungen beachtet werden müssen (Bohren vor Entgraten, Fräsen vor Polieren, etc.). Die Modellierung dieser Fragestellung führt dann auf das Sequential-Ordering-Problem.

4 Polyedrische Kombinatorik

Die polyedrische Kombinatorik befaßt sich mit der Untersuchung der Eigenschaften von Polyedern, die kombinatorischen Optimierungsproblemen zugeordnet werden. Anstelle einer formalen Einführung des Gebiets wollen wir den für Schnittebenenverfahren relevanten Teil der polyedrischen Kombinatorik anhand eines Beispiels skizzieren. Eine gute formale Einführung ist Pulleyblank(1989) [20].

Wir transformieren ein kombinatorisches Optimierungsproblem in einer Weise, die es uns erlauben wird, Methoden aus der linearen Optimierung anzuwenden.

Jeder zulässigen Lösung F wird ein Inzidenzvektor $\chi^F \in \{0,1\}^E$ zugeordnet mittels

$$\chi_{e_i}^F = \begin{cases} 0 & \text{falls } e_i \in F, \\ 1 & \text{falls } e_i \notin F. \end{cases}$$

Ein Inzidenzvektor hat also $|E|$ Komponenten, die mit den Elementen aus E indiziert sind. Im nächsten Schritt bilden wir die konvexe Hülle P_F der Inzidenzvektoren der zulässigen Lösungen und können unser Problem als lineares Optimierungsproblem (LP)

$$\min\{c^T x \mid x \in P_F\}$$

formulieren. Optimale Ecklösungen dieses LPs entsprechen optimalen Lösungen des Ausgangsproblems. Im Beispiel des Max-Cut-Problems ist E die Kantenmenge eines ungerichteten Graphen G , das System $\mathcal{F}$ besteht aus den Kantenmengen, die Schnitte in G repräsentieren, und $P_F = P_{\text{CUT}}(G)$ ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren aller Schnitte.

Die Definition von P_F als konvexe Hülle von Inzidenzvektoren ist algorithmisch unbrauchbar. Um Algorithmen der linearen Optimierung anwenden zu können, benötigen wir eine

Beschre

Die auch
wie mög
 $Ax \leq b$

Wir

[2] zusam

die Inzid

Ungleich

bezeichn

(4.1) Es
 Bx

(4.2) Die
aber
ist.

(4.3) Für
 $x(F)$
nur

(4.4) Sei
Dar
ung

Es gib
Komposit
sultate zu
bisher alle

Das th
pen ist der
ist für jed
verwandte
eine vollst
gleichunge

5 Bra

Nach Herle
Regel aber
listen und d
anzuwende
wächst typi
kombinatori
Die zent
zu generiere

Beschreibung von P_F mit linearen Gleichungen und Ungleichungen, d. h. eine Darstellung

$$P_F = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Bx = d, Ax \leq b\}.$$

Die auch algorithmisch beste Beschreibung enthält so wenige Gleichungen und Ungleichungen wie möglich. Man hat dann ein minimales Gleichungssystem $Bx = d$ und jede Ungleichung in $Ax \leq b$ entspricht genau einer maximalen Seitenfläche (Facette) von P_F .

Wir fassen einige Ergebnisse für das Max-Cut-Problem von Barahona & Mahjoub (1986) [2] zusammen. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $P_{\text{CUT}}(G)$ das zugehörige Polytop definiert durch die Inzidenzvektoren der Schnitte in G . Wir bezeichnen die Variablen zur Formulierung der Ungleichungen mit x_e für jede Kante $e \in E$. Für $F \subseteq E$ wird mit $x(F)$ die Summe $\sum_{e \in F} x_e$ bezeichnet. Es gelten:

- (4.1) Es gibt keine Gleichung, die von allen Punkten aus $P_{\text{CUT}}(G)$ erfüllt wird, d. h. das System $Bx = d$ ist leer.
- (4.2) Die Ungleichungen $x_e \geq 0$ und $x_e \leq 1$ sind zulässig für $P_{\text{CUT}}(G)$ für alle $e \in E$. Sie liefern aber nur dann Facetten, wenn die Kante e in keinem Kreis der Länge 3 von G enthalten ist.
- (4.3) Für jeden Kreis C von G und jede Teilmenge F von C mit ungerader Kardinalität ist $x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1$ eine zulässige Ungleichung für $P_{\text{CUT}}(G)$. Eine Facette wird nur dann geliefert, wenn C keine Diagonalkanten hat.
- (4.4) Sei $E_p \subseteq E$ die Kantenmenge eines vollständigen Untergraphen von G mit p Knoten. Dann ist $x(E_p) \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \lceil \frac{p}{2} \rceil$ eine zulässige Ungleichung, die eine Facette definiert, falls p ungerade ist.

Es gibt noch sehr viele weitere Klassen von facettendefinierenden Ungleichungen und auch Kompositionstheoreme zur Herleitung von neuen Ungleichungen aus bekannten. Weitere Resultate zur Facettialstruktur von $P_{\text{CUT}}(G)$ finden sich in Deza & Laurent (1988) [5]. Diese sind bisher allerdings noch nicht algorithmisch ausgewertet worden.

Das theoretische Studium der Facettialstruktur eines dem Problem zugeordneten Polytopen ist der erste wichtige Schritt zur Entwicklung von Schnittebenenverfahren. Dieses Studium ist für jedes Problem neu zu leisten. Oft kann man allerdings vorhandene Kenntnisse über verwandte Problemklassen ausnutzen. Für kein einziges NP-schwieriges Problem kennt man eine vollständige Beschreibung des zugehörigen Polytops durch lineare Gleichungen und Ungleichungen.

5 Branch and Cut

Nach Herleitung der theoretischen Resultate ist man von der algorithmischen Umsetzung in der Regel aber noch weit entfernt. Der naheliegende Ansatz, alle bekannten Ungleichungen aufzulisten und dann ein Verfahren der linearen Optimierung zur Lösung des Minimierungsproblems anzuwenden, ist undurchführbar. Die Zahl der bekannten Facettendefinierenden Ungleichungen wächst typischerweise exponentiell mit der Problemgröße. Dies ist sogar für polynomial lösbare kombinatorische Optimierungsprobleme möglich, z. B. hat auch das PMP diese Eigenschaft.

Die zentrale Idee eines Schnittebenenverfahrens besteht darin, Ungleichungen nur bei Bedarf zu generieren. Im Prinzip läuft ein solches Verfahren wie folgt ab.

- (5.1) Wähle aus allen bekannten Ungleichungen die Klassen aus, die im Verfahren berücksichtigt werden sollen.
- (5.2) Initialisiere ein Anfangs-Polytop, z. B. $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$.
- (5.3) Minimiere die Zielfunktion $c^T x$ über dem aktuellen Polytop.
- (5.4) Entspricht die Optimallösung einer zulässigen Lösung des Ausgangsproblems, dann beende das Verfahren. Das Ausgangsproblem ist in diesem Fall gelöst.
- (5.5) Ist dies nicht der Fall, so suche verletzte Ungleichungen und füge diese zum LP hinzu. Gehe zu Schritt (5.3).

Da wir nicht alle Ungleichungen zur Beschreibung von P_F kennen, kann in (5.5) der Fall eintreten, daß wir zwar keine zulässige Lösung vorliegen haben, aber keine verletzte Ungleichung finden können. Wir gehen auf diese Situation später noch ein. Die Hoffnung ist allerdings, bereits in Schritt (5.4) eine optimale Lösung zu finden.

Im Laufe des Verfahrens geht man also zu immer besseren Relaxierungen des eigentlichen Problems über. In jedem Schritt (5.5) wird die Relaxierung durch Hinzunahme weiterer Ungleichungen verschärft. Diese Ungleichungen "schneiden" den Optimalpunkt des jeweils aktuellen Problems ab. Daher resultiert auch die Bezeichnung Schnittebenenverfahren für diese Klasse von Algorithmen.

Der wesentliche Punkt bei der Realisierung des Verfahrens ist die Erkennung von verletzten Ungleichungen in (5.5). Hierzu muß ein sogenanntes Separationsproblem gelöst werden.

Separationsproblem

Sei y die in Schritt (5.3) gefundene (für das Ausgangsproblem nicht zulässige) Lösung der aktuellen Relaxierung. Bestimme aus der Klasse der ausgewählten Ungleichungen eine, die von y nicht erfüllt wird, oder stelle fest, daß keine solche existiert.

Die grundlegende Bedeutung dieses Problems ist auch theoretisch nachgewiesen. Ein wichtiges Resultat besagt (vereinfacht), daß das zu lösende Ausgangsproblem genau dann polynomial lösbar ist, wenn das Separationsproblem polynomial lösbar ist. Eine exakte Formulierung dieses Theorems sowie eine Diskussion seiner Konsequenzen ist in Grötschel, Lovász & Schrijver (1988) [12] zu finden.

Für den erfolgreichen Einsatz von Schnittebenenverfahren ist es also notwendig, das Separationsproblem für möglichst große Klassen von Ungleichungen effizient lösen zu können. Ist dies für eine Klasse nicht exakt möglich, sollte man wenigstens schnelle Heuristiken bereitstellen, die die Chance haben, verletzte Ungleichungen zu finden.

Wir skizzieren einen Algorithmus zur Lösung des Separationsproblems für die Kreisungleichungen (4.3) von Barahona & Mahjoub (1986) [2].

Separationsproblem

Sei y die in Schritt (5.3) gefundene (für das Ausgangsproblem nicht zulässige) Lösung der aktuellen Relaxierung. Bestimme aus der Klasse der ausgewählten Ungleichungen eine, die von y nicht erfüllt wird, oder stelle fest, daß keine solche existiert.

Der Separationsalgorithmus ist für große praktische Probleme sehr wichtig. Man wird daher schnelle Heuristiken und Hilfsmittel auf langsame Verfahren setzen.

Wie bereits erwähnt, ist das Schnittebenenverfahren nicht nur für unzulässige Lösungen, sondern auch für zulässige Lösungen anzuwenden. Man muß auf das Brechen der Menge der Lösungen achten. Der Gegensatz zum üblichen Schnittebenenverfahren ist, daß größere Chancen sehr schnell die Grenzen zu halten. Wie Schnittebenen an jeder Stelle beschriebene Verfahren aus Schnittebenenverfahren.

Zur konkreten Implementierung sind es noch einige Punkte, die zu beachten sind.

- Welches System wird verwendet?
- Soll das minimale Element von Variablen ausgewählt werden?
- In welcher Reihenfolge werden die Variablen ausgewählt?
- Sollen alle gefundenen Variablen ausgewählt werden?

Separation für Kreisungleichungen

Sei y die Lösung des aktuellen linearen Programms. Wir können annehmen, daß $0 \leq y \leq 1$ erfüllt ist. Wir konstruieren aus $G = (V, E)$ einen neuen Graphen $H = (V' \cup V'', E' \cup E'' \cup E''')$, der aus zwei Kopien G' und G'' von G und den folgenden zusätzlichen Kanten E''' besteht. Für jede Kante uv des Originalgraphen erzeugen wir zwei Kanten $u'v''$ und $u''v'$. Den Kanten $u'v''$ und $u''v'$ wird das Gewicht y_{uv} zugeordnet, die Kanten $u'v'$ und $u''v''$ erhalten das Gewicht $1 - y_{uv}$. Für jedes Knotenpaar u' und u'' wird der kürzeste verbindende Weg (bezüglich der neudefinierten Kantengewichte) in H berechnet. Ein solcher Weg enthält eine ungerade Anzahl von Kanten aus E''' und liefert zurückinterpretiert in G einen geschlossenen Kantenzug, der u enthält. Hat ein solcher (u', u'') -Weg eine Länge kleiner als 1, dann existiert ein Kreis $C \subseteq E$ und eine Kantenmenge $F \subseteq C$ ungerader Kardinalität, so daß y die zugehörige Kreisungleichung verletzt (C und F können leicht identifiziert werden). Ist keiner dieser Wege kürzer als 1, so werden alle Kreisungleichungen von der aktuellen LP-Lösung erfüllt. Das Separationsproblem kann somit in polynomialer Zeit ($O(n^3)$) gelöst werden.

Der Separationsalgorithmus für Kreisungleichungen hat zwar polynomielle Laufzeit, ist aber für große praktische Probleme unter Umständen nicht schnell genug, um häufig aufgerufen zu werden. Man wird daher immer versuchen, in den ersten Phasen des Schnittebenenverfahrens schnelle Heuristiken zum Auffinden verletzter Ungleichungen einzusetzen und erst als letztes Hilfsmittel auf langsamere exakte Verfahren zurückgreifen.

Wie bereits erwähnt kann problemabhängig immer der Fall eintreten, daß das reine Schnittebenenverfahren nicht zum Ziel führt, da zu irgendeinem Zeitpunkt zum "Abschneiden" einer unzulässigen Lösung keine Ungleichung mehr gefunden wird. In einer solchen Situation muß man auf das Branch-and-Bound-Prinzip zurückgreifen und durch Setzen von Variablen die Menge der Lösungen in Teilmengen partitionieren und so eine Enumeration starten. Im Gegensatz zum üblichen Branch-and-Bound-Verfahren hat man aber mit Schnittebenen viel größere Chancen sehr gute untere Schranken zu finden und den Enumerationsaufwand in engen Grenzen zu halten. Wegen ihrer globalen Gültigkeit für das zugeordnete Polytop lassen sich Schnittebenen an jedem Knoten des Verzweigungsbaums einsetzen. Man bezeichnet die hier beschriebene Verfahrensklasse allgemein als Branch-and-Cut-Verfahren, da sie eine Synthese aus Schnittebenenverfahren und Methoden der impliziten Enumeration darstellen.

Zur konkreten Implementierung sind nicht nur effiziente Separationsverfahren zu entwickeln, sondern es sind noch einige weitere Aspekte zu beachten. Wir führen einige dieser Fragen auf.

- Welches System soll in das Anfangs-LP eingehen?
- Soll das minimale Gleichungssystem explizit ins LP aufgenommen werden oder zur Elimination von Variablen verwendet werden?
- In welcher Reihenfolge sollen Separationsverfahren angewendet werden?
- Sollen alle gefundenen Schnittebenen zum LP hinzugefügt werden? Falls nicht, wie soll man auswählen?

- Sollen im Verlauf des Verfahrens Ungleichungen eliminiert werden, um das LP nicht zu groß werden zu lassen?
- Soll man anfangs nur eine Teilmenge der Variablen berücksichtigen?
- Welche Verzweigungsstrategie soll verwendet werden?
- Wie sollen zulässige Lösungen bestimmt werden?
- Welche Software soll zur Lösung der LPs benutzt werden?

Die Antworten auf diese Fragen können problemabhängig unterschiedlich ausfallen. Erfolgreiche Implementierungen basieren auf Erfahrung und problemspezifischen Maßnahmen.

6 Rechnergebnisse

Schnittebenenverfahren sind mit sehr gutem Erfolg an vielen praktischen Anwendungen getestet worden. Die Vorstellung einzelner Resultate kann hier nicht erfolgen. Wir geben einen kurzen Überblick und Hinweise auf weiterführende Literatur. Besonders zu erwähnen sind die Arbeiten Grötschel, Jünger & Reinelt (1984) [8] (hier wurde erstmals ein Branch-and-Cut-Algorithmus publiziert) und Padberg & Rinaldi (1991) [19] (hier wurde ein Branch-and-Cut-Verfahren für das Traveling Salesman Problem beschrieben, das gegenwärtig die größten Probleminstanzen lösen kann und eine beispielhafte Implementierung im Detail vorstellt). Es folgt eine (unvollständige) Liste wichtiger Beschreibungen und Anwendungen von Schnittebenenverfahren.

6.1 Perfektes-Matching-Problem

Grötschel & Holland (1985) [7]

Das Perfekte-Matching-Problem ist das einzige in unserer Übersicht enthaltene Problem, für das ein polynomialer Algorithmus bekannt ist. Edmonds' grundlegende Arbeit führte nicht nur zu diesem Algorithmus, sondern unter anderem auch zu einer vollständigen Facettialbeschreibung des Perfekten Matching Polytops. Das Separationsproblem für die zugehörigen Ungleichungen ist ebenfalls in polynomialer Zeit lösbar. Trotzdem schien es vor Erscheinen der Arbeit von Grötschel und Holland unwahrscheinlich, daß ein Schnittebenenverfahren (Enumeration ist hier wegen der vollständigen Beschreibung überflüssig) mit einer bekannten Implementierung von Edmonds' "kombinatorischen" Algorithmus konkurrieren könnte. Dies stellte sich aber überraschenderweise tatsächlich heraus. Inzwischen gibt es jedoch bessere Implementierungen von Edmonds' Algorithmus, die die Anwendung eines Schnittebenenverfahrens nicht mehr ratsam erscheinen lassen. Dennoch könnte dieses Verfahren wieder zum Einsatz kommen, wenn Matchingprobleme mit durch lineare Ungleichungen spezifizierten Nebenbedingungen zu lösen sind. Anwendungen des Perfekten-Matching-Problems in seiner reinen Form finden sich bei der Lösung des Planaren Max-Cut-Problems und des Chinesische-Postman-Problems. Das erste spielt z. B. in speziellen Spinglas- und Via-Minimierungsproblemen eine Rolle (siehe Barahona, Grötschel, Jünger & Reinelt (1988) [3]), das zweite bei der Plotzeitminimierung für zusammenhängende Graphen (siehe Grötschel, Jünger & Reinelt (1991) [11]).

6.2 Traveli

Padberg & Rinaldi

Nach mehreren V diesem Aufsatz e stellt. Mit seiner werden. Die größ plattenbohrproble weiteren Lektüre zur Bestimmung Branch-and-Cut- [17]. Hier wird in in Verbindung mi relativer Abweich

6.3 Max-C

Barahona, Gröts

Barahona, Jünger

Im ersten Aufsatz rungsproblems als ren vorgestellt, da Enumeration opti Natürlich ist die K Aufsatz wird ein Implementierung problems (0-1-QP und Grenzen eine relevante Instanze werden zu können

6.4 Surviva

Grötschel, Monme

Grötschel, Monme

Die beiden Aufsät Problems, für Spe Schnittebenenverfi dungsproblem, da die auf Glasfaserte

6.5 Linear-C

Grötschel, Jünger

Reinelt (1985) [21]

In den beiden Arbe plementierung wir

6.2 Traveling-Salesman-Problem

Padberg & Rinaldi (1991) [19]

Nach mehreren Vorarbeiten durch Padberg, Grötschel, Hong, Crowder und Holland wird in diesem Aufsatz eine beispielhafte Implementierung eines Branch-and-Cut-Algorithmus vorgestellt. Mit seiner Implementierung konnten viele Instanzen des TSP erstmals optimal gelöst werden. Die größte Instanz, die bis zum heutigen Tag den "Rekord" aufstellt, ist ein Leiterplattenbohrproblem mit 2392 Bohrlöchern. Dem interessierten Leser sei dieser Aufsatz zur weiteren Lektüre empfohlen, eine weitergehende Diskussion über den Einsatz von Heuristiken zur Bestimmung unterer und oberer Schranken bis hin zur Optimallösung von TSPs durch ein Branch-and-Cut-Verfahren findet sich in dem Übersichtsartikel Jünger, Reinelt & Rinaldi (1992) [17]. Hier wird insbesondere auch dargelegt, wie durch den Einsatz von Schnittebenenverfahren in Verbindung mit Heuristiken schnell Lösungen mit beweisbaren Gütegarantien von circa 1% relativer Abweichung von der Optimallösung ermittelt werden können.

6.3 Max-Cut-Problem, Quadratisches-0-1-Problem

Barahona, Grötschel, Jünger & Reinelt (1988) [3]

Barahona, Jünger & Reinelt (1989) [4]

Im ersten Aufsatz wird die Modellierung des Ising-Spincal-Problems und des Via-Minimierungsproblems als Max-Cut-Problem in Detail erläutert. Dann wird ein Schnittebenenverfahren vorgestellt, das in der Lage ist, viele große Probleminstanzen in beiden Anwendungen ohne Enumeration optimal zu lösen. Die größte gelöste Instanz hat 1601 Knoten und 4800 Kanten. Natürlich ist die Konvergenz des Verfahrens zu einer Optimallösung nicht garantiert. Im zweiten Aufsatz wird ein Branch-and-Cut-Verfahren für das Max-Cut-Problem angegeben, mit dessen Implementierung gute Rechenergebnisse für Instanzen des Quadratischen 0-1 Optimierungsproblems (0-1-QP) erzielt werden konnten. Dieser Aufsatz zeigt recht klar die Möglichkeiten und Grenzen eines Branch-and-Cut-Verfahrens für das Max-Cut-Problem. Viele anwendungsrelevante Instanzen sind noch zu groß, um mit dem derzeitigen Wissensstand optimal gelöst werden zu können.

6.4 Survivable-Network-Problem

Grötschel, Monma & Stoer (1989) [13]

Grötschel, Monma & Stoer (1989) [14]

Die beiden Aufsätze diskutieren polyedertheoretische Resultate für verschiedene Varianten des Problems, für Spezialfälle werden Separationsverfahren hergeleitet, die dann im Rahmen eines Schnittebenenverfahrens zur Lösung praktischer Probleme eingesetzt werden. Das reale Anwendungsproblem, das hier zugrunde liegt, ist der Entwurf ausfallsicherer Kommunikationsnetze, die auf Glasfasertechnologie basieren.

6.5 Linear-Ordering-Problem

Grötschel, Jünger & Reinelt (1984) [8]

Reinelt (1985) [21]

In den beiden Arbeiten wird erstmals ein Branch-and-Cut-Verfahren vorgestellt und seine Implementierung wird unter anderem auf das Triangulationsproblem für Input-Output-Tabellen

angewendet. Die Größenordnung der optimal triangulierbaren Tabellen (Zeilen- bzw. Spaltenzahl) konnte in etwa verdoppelt werden, so daß alle Tabellen der Europäischen Gemeinschaft, des Statistischen Bundesamtes und des Deutschen Instituts für Wirtschaftsforschung optimal trianguliert werden konnten. Weitere Anwendungen des LOP finden sich unter anderem bei speziellen Scheduling-Problemen. Das Buch Reinelt (1985) [21] beinhaltet eine umfangreiche Darstellung der polyedrischen Studien, des Designs und der Implementierung eines Branch-and-Cut-Verfahrens sowie der Anwendung auf verschiedene reale Probleminstanzen.

6.6 Sequential-Ordering-Problem

Ascheuer, Grötschel, Escudero & Stoer (1990) [1]

Polyedertheoretische Resultate für das Sequential-Ordering-Problem führen zur Formulierung und Implementierung eines Schnittebenenverfahrens, mit dem Instanzen, die in der Flexiblen Fertigung auftreten, optimal gelöst werden konnten. Wegen seiner großen Anwendungsrelevanz wird derzeit von Ascheuer, Jünger, Reinelt und Stoer ein Branch-and-Cut-Verfahren entwickelt, dessen Implementierung auf Robotersteuerungsprobleme und Hochregallager-Zugriffsprobleme angewandt werden soll.

In allen hier aufgeführten Beispielen wurden bessere Ergebnisse erzielt als mit den bisherigen Ansätzen. Das ist überraschend, da die Algorithmen ja nur auf einer sehr unvollständigen Kenntnis der Facetten der jeweiligen Polytope beruhen. In den meisten der obigen Fälle haben erst Schnittebenenverfahren die Lösung von praktischen Problemen ermöglicht.

Zum Einsatz von Schnittebenenverfahren bei realen Anwendungen seien noch zwei wichtige Punkte angemerkt.

Ein Schnittebenenalgorithmus liefert jederzeit eine untere Schranke für den Wert einer Optimallösung. Im praktischen Einsatz kann daher eventuell bei einer guten Qualitätsgarantie für eine bekannte zulässige Lösung entschieden werden, die Berechnung abzubrechen. Im Einzelfall kann die erreichte (bewiesene) Qualität als ausreichend erachtet werden.

Vor seiner Terminierung liefert das Schnittebenenverfahren selbst keine zulässigen Lösungen für das Ausgangsproblem. Man wird daher immer auch Heuristiken einsetzen, die zulässige Lösungen berechnen. Von besonderer Bedeutung sind hier Verfahren, die die aktuellen LP-Lösungen ausnutzen können. Diese geben normalerweise nützliche Hinweise über das Aussehen von optimalen Lösungen. In der Praxis wird man immer ein hybrides System bestehend aus Schnittebenen- und Heuristikkomponenten einsetzen.

Zusammenfassend sollte betont werden, daß Realisierungen von Schnittebenenverfahren keineswegs einfach sind. Abgesehen von den umfangreichen theoretischen Vorarbeiten (Studium der Facettialstruktur von Polytopen und Entwurf von Separationsalgorithmen) sind gute Kenntnisse im Softwaredesign unbedingt erforderlich, um aus den verschiedenen Teilkomponenten ein funktionierendes Gesamtsystem zu implementieren. Allerdings zeigt eine Vielzahl von Beispielen, daß sich dieser Aufwand lohnt.

Literatur

- [1] N. Ascheuer, M. Grötschel, L. Escudero & M. Stoer, A cutting plane approach to the sequential ordering problem (with applications to job scheduling in manufacturing), Report

Schnittebenen

No. 190, Schwerpunktprogramm, Augsburg, 1990.

- [2] F. Barahona & A. R. M. ...
157-173.

- [3] F. Barahona, M. Grötschel, ...
timization to statistical ...
493-513.

- [4] F. Barahona, M. Jünger, ...
mathematical Programming

- [5] M. Deza & M. Laurent, ...
University of Tokyo, 1989.

- [6] J. Edmonds, Paths, trees, ...

- [7] M. Grötschel & O. Hammer, ...
mathematical Programming

- [8] M. Grötschel, M. Jünger, ...
problem, Operations Research

- [9] M. Grötschel, M. Jünger, ...
a polyhedral approach to ...
the Heidelberg Colloquium ...
Heidelberg, 1987, 325-340.

- [10] M. Grötschel, M. Jünger, ...
layer preference, Zeitschrift für

- [11] M. Grötschel, M. Jünger, ...
a case study, ZOR - Journal of

- [12] M. Grötschel, L. Lovász, ...
mization, Springer-Verlag

- [13] M. Grötschel, C. L. Monma, ...
algorithm for designing ...
No. 188, Schwerpunktprogramm ...
Augsburg, 1989.

- [14] M. Grötschel, C. L. Monma, ...
Report No. 189, Schwerpunktprogramm ...
Augsburg, 1990.

- [15] M. Grötschel & M. Jünger, ...
A. H. G. Rinnooy Kan, ...
Chester, 1985, 251-305.

- No. 190, Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Universität Augsburg, Augsburg, 1990.
- [2] F. Barahona & A. R. Mahjoub, On the cut polytope, *Mathematical Programming* 36 (1986), 157-173.
- [3] F. Barahona, M. Grötschel, M. Jünger & G. Reinelt, An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design, *Operations Research* 36 (1988), 493-513.
- [4] F. Barahona, M. Jünger & G. Reinelt, Experiments in quadratic 0-1-programming, *Mathematical Programming* 44 (1989), 127-137.
- [5] M. Deza & M. Laurent, Facets for the cut cone I, Research Memorandum RMI 88-13, University of Tokyo, 1988.
- [6] J. Edmonds, Paths, trees and flowers, *Canadian Journal of Mathematics* 17 (1965), 449-469.
- [7] M. Grötschel & O. Holland, Solving matching problems with linear programming, *Mathematical Programming* 33 (1985), 243-259.
- [8] M. Grötschel, M. Jünger & G. Reinelt, A cutting plane algorithm for the linear ordering problem, *Operations Research* 32 (1984), 1195-1220.
- [9] M. Grötschel, M. Jünger & G. Reinelt, Calculating exact ground states of spin glasses: a polyhedral approach, in: J. L. van Hemmen & I. Morgenstern (eds.), *Proceedings of the Heidelberg Colloquium on Glassy Dynamics*, Lecture Notes in Physics 275, Springer, Heidelberg, 1987, 325-353.
- [10] M. Grötschel, M. Jünger & G. Reinelt, Via minimization with pin preassignments and layer preference, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 69 (1989), 393-399.
- [11] M. Grötschel, M. Jünger & G. Reinelt, Optimal control of plotting and drilling machines: a case study, *ZOR - Methods and Models of Operations Research* 35 (1991), 61-84.
- [12] M. Grötschel, L. Lovász & A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, 1988.
- [13] M. Grötschel, C. L. Monma & M. Stoer, Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints, Report No. 188, Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Universität Augsburg, Augsburg, 1989.
- [14] M. Grötschel, C. L. Monma & M. Stoer, Polyhedral approaches to network survivability, Report No. 189, Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Universität Augsburg, Augsburg, 1989.
- [15] M. Grötschel & M. W. Padberg, Polyhedral theory, in: E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan & D. Shmoys (eds.), *The Traveling Salesman Problem*, Wiley, Chichester, 1985, 251-305.

- [16] M. Jünger, A. Martin, G. Reinelt & R. Weismantel, Quadratic 0-1 optimization and a decomposition approach for the placement of electronic circuits, Report No. 285, Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Universität Augsburg, Augsburg, 1991.
- [17] M. Jünger, G. Reinelt & G. Rinaldi, The Traveling Salesman Problem, to appear in: M. Ball, T. Magnanti, C. Monma & G. Nemhauser (eds.), *Handbook on Operations Research and Management Science: Networks*, North Holland, Amsterdam, 1992.
- [18] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan & D. B. Shmoys (eds.), *The Traveling Salesman Problem* John Wiley & Sons, Chichester, 1985.
- [19] M. W. Padberg & G. Rinaldi, A branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems, *SIAM Review* 33 (1991), 60-100.
- [20] W. R. Pulleyblank, Polyhedral Combinatorics, in: G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan & M. J. Todd (eds.), *Handbook on Operations Research and Management Science*, Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1989.
- [21] G. Reinelt, *The Linear Ordering Problem: Algorithms and Applications*, *Research and Exposition in Mathematics* 8, Heldermann Verlag, Berlin 1985.

Michael Jünger, Institut für Informatik, Universität zu Köln, Pohligstraße 1, D-5000 Köln 51

Gerhard Reinelt, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 293, D-6900 Heidelberg

Eingegangen am 22.5.1992

GAMM-Mit
1992, Heft 2

Zur

1. Historie

Jedes Lebewesen
das Nervensystem
überleben.

Umfang spezieller
zu verändern
bestimmen.
Menschheits-
Erfahrungen
Konkreten
weise wurde

J. Kepler (1571-1630)
Bewegung der
Physik wurde
neuen Entdeckungen
der Annahme
Newton (1643-1727)
begeisterte
vertreten wie

Bei der Entdeckung
(1646 - 1716)
Kugel mit
gelegene Punkte
refeld (Wirkung)
Aufgabe. Die
eindeutig m

N. H. Abel (1802-1829)
Einfluß der
Zeit $t = t_0$ d
zur Zeit $t >$

¹ Dieser Artikel
geschrieben, und
dieses Artikels
merkungen wie