Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Markus Speth
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

6. Übungsblatt WS 08/09
Abgabetermin: 26.11.2008

Aufgabe 21

Bestimmen Sie mit der Ungarischen Methode eine Zuordnung maximalen Gewichts für die folgende Kostenmatrix und geben Sie dabei alle wesentlichen Zwischenschritte an.

$$\begin{pmatrix} 24 & 28 & 3 & 8 & 12 & 14 \\ 25 & 22 & 3 & 20 & 16 & 11 \\ 12 & 26 & 21 & 35 & 30 & 11 \\ 21 & 6 & 34 & 18 & 22 & 27 \\ 8 & 16 & 15 & 4 & 4 & 6 \\ 32 & 9 & 3 & 5 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Partitionsmengen V_1 und V_2. Die *Nachbarschaft* einer Menge $S \subseteq V_1$ ist $\delta(S) := \{v_2 \in V_2 \mid \text{es existiert ein } v_1 \in S \text{ mit } v_1v_2 \in E\}$. Zeigen Sie: G enthält genau dann ein Matching der Kardinalität $|V_1|$, wenn $|\delta(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq V_1$ gilt.

Aufgabe 23

Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger bipartiter Graph. Jedem Knoten $i \in V$ sei ein Gewicht $a_i > 0$ zugeordnet und für die Kantengewichte gelte $c_{ij} = a_i a_j$ für $ij \in E$. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der eine Zuordnung mit minimalem Gesamtgewicht bestimmt und zeigen Sie seine Korrektheit.

Aufgabe 24

Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c_{ij} für $ij \in E$. Es sei k die Anzahl der verschiedenen Werte der Gewichte, also $k \leq |E|$. Außerdem sei eine Subroutine `findAssignment`(E') mit der Laufzeit $O(\sqrt{V}E')$ bekannt, die für jede Kantenmenge $E' \subseteq E$ eine Zuordnung findet, die nur Kanten aus E' enthält oder ausgibt, dass keine solche Zuordnung existiert.

a) *Bottleneck assignment problem.* Gesucht ist eine Zuordnung, in der das minimale in der Zuordnung vorkommende Gewicht möglichst groß ist. Finden Sie einen $O(\log k \cdot \sqrt{V}E)$ Algorithmus, der dieses Problem optimal löst.

b) *Balanced assignment problem.* Gesucht ist eine Zuordnung, in der die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten vorkommenden Gewicht möglichst klein ist. Finden Sie einen Algorithmus, der dieses Problem in der Zeit $O(k \cdot \sqrt{V}E)$ optimal löst.