Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Marcus Oswald
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

LP-Präsenz-Lösungs. Übungsblatt WS 02/03
Abgabetermin:

Aufgabe E

Die Variable x_{ij} wird zur Bezeichnung des Flusses von i nach j benutzt. Dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll}
x_{S1} - x_{12} - x_{14} & = & 0 & \text{(Knoten 1)} \\
x_{S2} + x_{12} + x_{32} - x_{25} - x_{24} & = & 0 & \text{(Knoten 2)} \\
x_{S3} - x_{32} - x_{35} - x_{37} & = & 0 & \text{(Knoten 3)} \\
x_{14} + x_{24} - x_{45} - x_{46} & = & 0 & \text{(Knoten 4)} \\
x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{65} - x_{57} - x_{5T} & = & 0 & \text{(Knoten 5)} \\
x_{46} - x_{65} - x_{6T} & = & 0 & \text{(Knoten 6)} \\
x_{37} + x_{57} - x_{7T} & = & 0 & \text{(Knoten 7)}
\end{array}$$

Die Kapazitätsbeschränkungen sind klar: $x_{S1} \leq 8, \ldots, x_{7T} \leq 3$. Die Zielfunktion ist $\max x_{S1} + x_{S2} + x_{S3}$ oder (äquivalent) $\max x_{5T} + x_{6T} + x_{7T}$.

Aufgabe F

Wir beschreiben mit x_a, x_b, x_c die Anzahl der Einheiten an Müsli der Sorte A, B, C. Dann erhalten wir das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll}
\max & 5x_a + 4x_b + 3x_c \\
\text{s.t.} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5000 \\ 11000 \\ 8000 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Untere Schranken erhält man beispielweise durch Einschränkung auf nur eine Sorte. Produziert man nur Müslimischung A, so kann man $\min\{500/2, 11000/3, 8000/1\} = 2500$ Einheiten produzieren. Der Gewinn wäre 12500. Analog ist der Gewinn bei Produktion von Mischung B $4 * 5000/3 = 6666\frac{2}{3}$ und bei Mischung C ist er $4000 * 3 = 12000$. Somit ist 12500 eine gute untere Schranke. Durch Angabe anderer zulässiger Lösungen lässt sich diese Schranke evtl. verbessern.

Zur Bestimmung einer oberen Schranke zieht man das duale Programm heran. Analog zum Beispiel der Vorlesung sucht man eine positive LK der Nebenbedingungen, sodass die linke Seite in jedem Koeffizient $\geq$ der Zielfunktion ist. Die rechte Seite sollte dabei so klein wie möglich werden. Wir erhalten

$$\begin{array}{ll}
\min & 5000y_1 + 11000y_2 + 8000y_3 \\
\text{s.t.} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{array} .$$

Nun kann man wiederum $y_2 = y_3 = 0$ annehmen und erhält $y_1 = 3$. Bei $y_1 = y_3 = 0$ ergibt sich $y_2 = 4$ und bei $y_1 = y_2 = 0$ schließlich $y_3 = 5/3$. Die Zielfunktionswerte sind dann 15000, 44000 und $13333\frac{1}{3}$. Als obere Schranke des ursprünglichen Programms erhalten wir somit $13333\frac{1}{3}$.

Aufgabe G

Wir führen z für die Zielfunktion ein und erhalten das äquivalente Programm (x_i, c_i etc. sind entsprechend dimensionierte Teilvektoren)

$$\begin{array}{llcrcrcl}
\max & z & & & & & & \\
\text{s.t.} & -c_1^T x_1 & - & c_2^T x_2 & - & c_3^T x_3 & \leq & -z \\
 & A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & \leq & a_1 \\
 & -A_{21}x_1 & - & A_{22}x_2 & - & A_{23}x_3 & \leq & -a_2 \\
 & A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & A_{33}x_3 & = & a_3 \\
 & & & & & x_1 & \leq & 0 \\
 & & & & & -x_2 & \leq & 0
\end{array}$$

$$P_z := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -c_1^T & -c_2^T & -c_3^T \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & -A_{22} & -A_{23} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -z \\ a_1 \\ -a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = a_3 \}$$

Das Optimierungsproblem ist nun $\max\{z \mid P_z \neq 0\}$ bzw. $\inf\{z \mid P_z = \emptyset\}$. Nach dem Farkas-Lemma ergibt sich (x ist in der Formulierung nicht vorzeichenbeschränkt; die Vorzeichenbeschränkung von x_1 und x_2 ist implizit)

$$P_z = \emptyset \Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{lcl}
\begin{pmatrix} -c_1 & A_{11}^T & -A_{21}^T & A_{31}^T & I & 0 \\ -c_2 & A_{12}^T & -A_{22}^T & A_{32}^T & 0 & -I \\ -c_3 & A_{13}^T & -A_{23}^T & A_{33}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
-\lambda z + a_1^T v_1 - a_2^T v_2 + a_3^T v_3 & < & 0 \\
\lambda, u, v_1, v_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Man kann schließen, dass es im Falle $P_z = \emptyset$ nur eine Lösung mit $\lambda \neq 0$ geben kann, wenn das ursprüngliche Problem eine Lösung hat. Damit kann man normieren, d.h. das System

$$\begin{array}{lcl}
\begin{pmatrix} A_{11}^T & -A_{21}^T & A_{31}^T & I & 0 \\ A_{12}^T & -A_{22}^T & A_{32}^T & 0 & -I \\ A_{13}^T & -A_{23}^T & A_{33}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
a_1^T v_1 - a_2^T v_2 + a_3^T v_3 & < & z \\
u, v_1, v_2 & \geq & 0
\end{array}$$

ist lösbar.

Sucht man nun das kleinste z, für das das obige System lösbar ist, das heißt für das $P_z = \emptyset$ gilt, so bedeutet das, dass man

$$\begin{array}{llcrcrcl}
\min & a_1^T x + a_2^T x_2 + a_3^T x_3 & & & & & & \\
\text{s.t.} & A_{11}^T v_1 & + & A_{21}^T v_2 & + & A_{31}^T v_3 & \leq & c_1 \\
 & A_{12}^T v_1 & + & A_{22}^T v_2 & + & A_{32}^T v_3 & \geq & c_2 \\
 & A_{13}^T v_1 & + & A_{23}^T v_2 & + & A_{33}^T v_3 & = & c_3 \\
 & & & & & v_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & v_2 & \leq & 0
\end{array}$$

zu lösen hat, wenn man die u_1 und u_2 als Schlupfvariablen ignoriert..

Aufgabe H

Sei x_i das im Jahr $1994 + i$ aufgenommene Geld. Dann haben wir folgende Bedingungen (z ist 1.07):

$$\begin{array}{lcl}
x_1 & \geq & 10 \\
x_2 + (x_1 - 10) * z & \geq & 8 \\
x_3 + (x_2 + (x_1 - 10) * z - 8) * z & \geq & 6 \\
x_4 + (x_3 + (x_2 + (x_1 - 10) * z - 8) * z - 6) * z & \geq & 2 \\
x_5 + (x_4 + (x_3 + (x_2 + (x_1 - 10) * z - 8) * z - 6) * z - 2)z & \geq & 4
\end{array}$$

Das kann man natürlich noch so schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z^2 & z & 1 & 0 & 0 \\ z^3 & z^2 & z & 1 & 0 \\ z^4 & z^3 & z^2 & z & 1 \end{pmatrix} \quad x \quad \geq \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 8 + 10z \\ 6 + 8z + 10z^2 \\ 2 + 6z + 8z^2 + 10z^3 \\ 4 + 2z + 6z^2 + 8z^3 + 10z^4 \end{pmatrix}$$

Die Zielfunktion ist $\min 1.50x_1 + 1.47x_2 + 1.31x_3 + 1.25x_4 + 1.19x_5 - (x_5 + (x_4 + (x_3 + (x_2 + (x_1 - 10) * z - 8) * z - 6) * z - 2)z - 4)$

Aufgabe I

Zunächst stellt man fest, daß für das angegebene LP x zulässig ist. In den Zeilen 1,2 und 5 sind die Ungleichungen straff, d.h. Gleichheit gilt. Der Zielfuktionswert ist 17.

Das duale Programm lautet

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 5y_4 + 7y_5 + 5y_6 \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad \geq \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y \quad \geq \quad 0 \end{array}$$

Wenn das angegebene x eine Optimallösung ist, so existiert eine Optimallösung y für das duale Programm. Da x_3, x_4 und x_6 ungleich 0 sind, müssen die 3.,4. und 6. Zeile des dualen Programms für y straff sein. Außerdem läßt sich sagen, daß $y_3 = y_4 = y_6 = 0$ gelten muß, da die entsprechenden Zeilen des primalen Programms für das gegebene x "Spiel" haben.

Demnach muß eine optimale Lösung des dualen Problems

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Man rechnet leicht nach, daß dies nur für $y^T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 0)^T$ der Fall ist. Für dieses y ist jedoch der Zielfunktionswert ebenfalls 17. Der gegebene Vektor muß daher optimal sein.